

О необходимости количественного анализа спонтанного дрейфа автоволнового вихря в 2D-среде

Москаленко А.В.

Учреждение Российской академии наук
Институт математических проблем биологии РАН
cardio@avmoskalenko.ru

Abstract

The importance of quantitative analysis of autowave solutions is discussed by the example of the study of peculiarities of autowave behaviour in the bifurcation spot.

1 Автоволновые феномены

Важность автоволновых процессов в настоящее время широко осознается; особое место им отведено в кардиологии [4]. Одним из типичных автоволновых решений является *ревербератор* — автоволновой вихрь в 2D-среде, т.е. вращающаяся автоволна со свободным концом, которая часто принимает вид вращающейся спирали; отличие ревербератора от *спиральной автоволны*, достаточно подобно обсуждалось ранее [4]. Характерным поведением ревербератора является меандр — спонтанный дрейф ревербератора в однородной среде. Недавно [4, 5] был получен *автоволновой серпантин* — явление спонтанного торможения спонтанного дрейфа ревербератора в однородной среде.

Автоволновые модели показывают достаточно разнообразное поведение, причем порой даже малого изменения параметров системы достаточно для радикального изменения поведения системы, как это было показано, например, в недавних работах по изучению системы свертывания крови [3]. Эти обстоятельства делают построение параметрического портрета необходимым первым шагом при использовании той или иной автоволновой модели. Однако следует отметить некоторую странность исторически сложившейся ситуации: при исследовании автоволновых решений преобладает традиция качественного визуального анализа получаемых решений. Тем не менее недавняя практика показала [5], что использование количественных методов может оказаться весьма продуктивным: так, лишь благодаря количественному анализу дрейфа ревербератора удалось доказать, что меандр и серпантин являются существенно различными автоволновыми решениями, и в исследуемой части пространства параметров изучаемой модели была достаточно точно определена граница между меандром и серпантинном.

Автоволновой серпантин представляет собой явление так называемой *бифуркационной памяти* (БП). Под БП понимают необычный переходный процесс, иногда наблюдаемый в поведении системы, находящейся вблизи бифуркационной границы [2, 3]. Хотя существует несколько точек зрения на природу этого феномена, тем не менее, признается то обстоятельство, что БП играет весьма существенную роль в практике, ибо система в этом случае теряет управляемость [2]. Поэтому с практической точки зрения важно выяснить ширину пограничной зоны, в которой наблюдается этот феномен. Для определенности, множество точек вдоль бифуркационной границы пространства параметров, где феномен БП прекращается, назовем *линией выхода из бифуркационной зоны*. Под *пограничной бифуркационной зоной* будем понимать множество точек между бифуркационной границей и линией выхода из бифуркационной зоны. К сожалению, использованный нами прежде [5] метод количественного анализа спонтанного дрейфа ревербератора в 2D-среде не позволил выявить ширину пограничной бифуркационной зоны.

В данной работе предлагается количественный подход, позволяющий проанализировать особенности поведения автоволновой модели в пограничной бифуркационной зоне и определить линию выхода из бифуркационной зоны.

2 Методы и результаты

2.1 Исследуемая модель

В работе используется предложенная Алиевым и Панфиловым [1] простая двухкомпонентная модель возбудимой среды:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u - ku(u - a)(u - 1) - uv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \varepsilon(u, v)(-v - ku(u - a - 1)), \\ \varepsilon(u, v) &= \varepsilon_0 + \frac{\mu_1 v}{u + \mu_2}.\end{aligned}$$

Моделирование выполнялось для двумерных сред 128x128 с граничными условиями Неймана. Все условия моделирования и способ определения траектории кончика ревербератора были подробно описаны ранее [5, 6]. Отметим хорошо известное

обстоятельство, что, хотя от способа определения кончика ревербератора положение его траектории может несколько изменяться, тем не менее, ее существенные особенности сохраняются: в частности, сохраняется периодичность изменений ее кривизны.

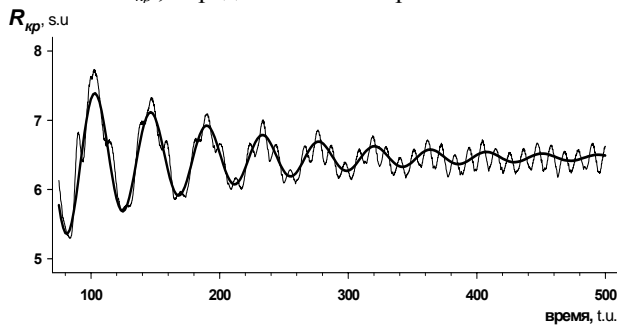
2.2 Анализ движения ревербератора

При анализе экспериментальных зависимостей одним из стандартных подходов является параметризация кривой, соответствующей результатам измерений. Прежде чем приступить к параметризации траекторий, нам представилось естественным преобразовать динамику двух пространственных переменных в динамику одной переменной — кривизны траектории. Измерение кривизны траектории осуществлено следующим образом. Для каждой точки траектории участок вблизи этой точки был аппроксимирован дугой окружности при помощи МНК. Для аппроксимации выбирался участок траектории, соответствующий фиксированному интервалу времени (окно аппроксимации). В результате для каждого момента времени получена оценка радиуса кривизны траектории.

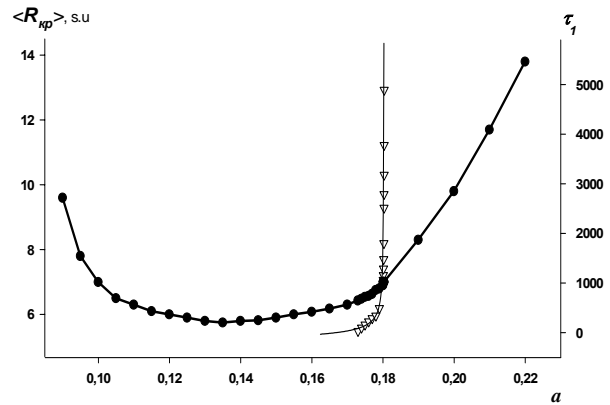
Далее соответствующие серпантину [5] зависимости радиуса кривизны траектории, $R_{кр}$, от времени, t , аппроксимированы следующей функцией:

$$R_{кр} = k_0 + k_1 \cdot e^{-x/k_2} \sin(2\pi \cdot t / k_3 + k_4),$$

где k_0 дает оценку среднего радиуса кривизны, $\langle R_{кр} \rangle$, k_1 — начальная амплитуда ее колебаний, k_2 — характерное время затухания колебаний и k_3 — период колебаний кривизны. Аппроксимация осуществлена при помощи стандартных средств, предоставляемых программой SigmaPlot. На рисунке показан пример такой аппроксимации (толстая линия) для $a = 0.170$; тонкой линией показана величина $R_{кр}$, определенная экспериментально.



В результате были получены зависимости параметров аппроксимирующей функции от изменяемого в ходе вычислительных экспериментов параметра модели a . Наиболее интересной оказалась зависимость $\langle R_{кр} \rangle$ от a ; она представлена на следующем рисунке, на котором темными кружками отмечена $\langle R_{кр} \rangle$, а светлыми треугольниками показана найденная ранее [5] зависимость характерного времени спонтанного торможения ревербератора, τ_1 , от параметра модели, a , вблизи бифуркационной границы, соответствующей значению $a_c = 0.1803$.



3 Обсуждение

На графике зависимости $\langle R_{кр} \rangle$ от a виден экстремум примерно при $a = 0.135$; он находится на некотором расстоянии от бифуркационной границы. Пока не доказано иное, естественным выглядит предположение, что этот минимум вдоль бифуркационной границы как раз и соответствует линии выхода из бифуркационной зоны.

Данная работа показала, что без применения количественных методов оценки особенностей получаемого автоволнового решения оказывается невозможным ответить на ряд важных вопросов. Нет причин сомневаться, что применение комбинации методов количественной оценки спонтанного дрейфа ревербератора позволит автоматизировать построение параметрических портретов автоволновых моделей двумерных сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 08-07-00353 и 10-01-00609.

References

- [1] R. Aliev, A. Panfilov. A simple two-variable model of cardiac excitation. *Chaos, Solutions & Fractals* 1996; 7(3): 293-301.
- [2] M. Feigin, M. Kagan. Emergencies as a manifestation of effect of bifurcation memory in controlled unstable systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2004; 14(7): 2439-2447.
- [3] Ф.И. Атауллаханов., Е.С. Лобанова О.Л. Морозова, Э.Э. Шноль, Е.А. Ермакова, А.А. Бутылин, А.Н. Заикин. Сложные режимы распространения возбуждения и самоорганизации в модели свертывания крови. *УФН*. 2007. 177(1): 87–104.
- [4] Ю.Е. Елькин, А.В. Москаленко. Базовые механизмы аритмий сердца. В кн.: *Клиническая аритмология*. Под ред. проф. А.В. Ардашева. М.: ИД Медпрактика-М, с. 45–74, 2009.
- [5] Ю.Е. Елькин, А.В. Москаленко, Ч.Ф. Стармер. Спонтанная остановка дрейфа спиральной волны в однородной возбудимой среде. *Математическая биология и биоинформатика*, 2007; 2(1): 73-81.
- [6] А.В. Москаленко, Ю.Е. Елькин. Мономорфна ли мономорфная аритмия? *Биофизика*, 2007; 52(2): 339-343.